Sélection Internationale — Session 2003
Ecole Normale Supérieure
Epreuve de culture scientifique – Informatique — Durée 3 heures

Premier Exercice

L'exercice porte sur la complexité du problème de la sélection du plus petit élément, ou du second plus petit élément ou à la fois du plus petit élément et du plus grand élément d'un tableau $A = [A[1], A[2], \ldots, A[n]]$ de n éléments distincts deux-à-deux d'un univers totalement ordonné. Par exemple si l'univers est celui des nombres naturels et si le tableau est $[4, 15, 8, 1, 5]$, le plus petit élément est 1, le second plus petit élément est 4 et le plus grand élément est 15.

Question 1.– Montrer que toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ s'écrit de manière unique comme un produit de la forme

$$(1a_1)(2a_2)\ldots(na_n)$$

où (ia_i) est la transposition qui échange i et a_i et où $1 \leq a_i \leq i$. (Noter que nous autorisons $a_i = i$; dans ce cas la «transposition» (ii) est la permutation identité.) En déduire un générateur de permutation aléatoire en utilisant un générateur de nombre aléatoire. Quelle est la complexité de votre algorithme?

L'algorithme RAND-MIN sélectionne le plus petit élément du tableau après permutation aléatoire des éléments du tableau.

Algorithm RAND-MIN $([A[1], A[2], \ldots, A[n]])$;

```
0.  Choisir une permutation aléatoire σ de {1, 2, ..., n}
1.  min := A[σ(1)];
2.  for i := 2 to n
3.    do if min > A[σ(i)]
4.         then min := A[σ(i)]
5.  return min
```

Question 2.– Le nombre d'affectations (:=) exécutées par RAND-MIN dépend du choix de la permutation σ. Quelles sont ses valeurs possibles et quelle est sa valeur moyenne?

Question 3.– Quel est le nombre de comparaisons exécutées par RAND-MIN? Montrer que tout algorithme de recherche du plus petit élément basé sur des comparaisons doit dans le pire des cas exécuter au moins ce nombre de comparaisons.

Question 4.– Montrer que le second plus petit élément du tableau est calculable en utilisant $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ comparaisons. Montrer que tout algorithme de calcul du second plus petit élément basé sur des comparaisons doit exécuter au moins $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ comparaisons dans le pire des cas.

Question 5.– Montrer que le plus petit élément et le plus grand élément sont calculables en utilisant $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparaisons. Montrer que tout algorithme de calcul du plus petit élément et du plus grand élément basé sur des comparaisons doit exécuter au moins $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparaisons dans le pire des cas.

Deuxième Exercice

L'exercice porte sur un algorithme de programmation linéaire de complexité linéaire en le nombre de contraintes. On rappelle que la médiane d'une liste de n éléments deux à deux distincts d'un univers totalement ordonné est le $\lceil n/2 \rceil$-ième plus petit élément. Par exemple si l'univers est celui des rationnels et si la liste est la liste $[1/2, 4, 3/2, 8, 17/2, 1/3]$, la médiane est $3/2$.

L'algorithme SELECT détermine le k-ième plus petit élément d'une liste de n éléments deux à deux distincts comme suit:

- Scinder la liste des n éléments en $\lfloor n/5 \rfloor$ sous-listes de 5 éléments et une sous-liste de 0,1,2,3, ou 4 éléments;
- Calculer la médiane de chacune des $\lceil n/5 \rceil$ sous-listes;
- Calculer en utilisant SELECT récursivement la *médiane des médianes*, c'est-à-dire la médiane de la liste des médianes des $\lceil n/5 \rceil$ sous-listes;
- Scinder la liste en deux sous-listes : l'une contenant les éléments inférieurs à la médiane des médianes et l'autre contenant les éléments supérieurs à la médiane des médianes;
- Appeler SELECT récursivement sur la sous-liste contenant le k-ième plus petit élément.

Question 1.– Montrer que le nombre de comparaisons $T(n)$ de l'algorithme SELECT vérifie la récurrence

$$T(n) \leq T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + O(n).$$

En déduire que la médiane d'un ensemble de n éléments est calculable en temps linéaire. Discuter le cas où les éléments ne sont plus nécessairement distincts.

Soit $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ une famille de $n \geq 1$ droites du plan $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = a_i x + b_i$, $a_i \neq 0, b_i \in \mathbb{Q}$. Un élément de L est appelé une *contrainte*. Soit $P(L)$ le polygone intersection des demi-plans

$$l_i^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq a_i x + b_i\}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et soit $Q(L)$ l'ensemble des points (x^*, y^*) de P tels que $y^* \leq y$ pour tout $(x, y) \in P$. Une contrainte $l \in L$ est dite redondante si $Q(L) = Q(L \setminus \{l\})$.

Question 2.– Montrer que $Q(L)$ non vide est décidable en temps linéaire et que si $Q(L)$ est non vide alors $Q(L)$ est un singleton.

On suppose maintenant que $Q(L) = \{(x^*, y^*)\}$ est non vide.

Question 3.– Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Montrer que l'on peut décider en temps linéaire si x^* est supérieur, inférieur ou égal à x_0.

Un *couplage* C *de* L est une partition de L en $\lfloor n/2 \rfloor$ paires de 2 contraintes plus, si n est impair, un singleton.

Question 4.– Soit C un couplage de L et soit x_0 la médiane des absicces des points d'intersection des paires de droites du couplage C. En utilisant la question précédente montrer qu'un ensemble de contraintes redondantes de cardinalité $\lfloor n/4 \rfloor$ est calculable en temps linéaire.

Question 5.– En déduire un algorithme de calcul (x^*, y^*) de complexité linéaire.

Troisième Exercice

Exercice conseillé aux candidats de la discipline secondaire

Un *graphe orienté* est un couple (V, E) où V est un ensemble fini et où E est un sous-ensemble du produit $V \times V$ privé de sa diagonale $\Delta = \{(x, y) \in V \times V \mid x = y\}$. Les éléments de V sont appelés *sommets* et les éléments de E sont appelés *arcs*. Changer l'orientation d'un arc (x, y) c'est remplacer cet arc par l'arc (y, x). On utilise la notation $x \to y$ pour signifier que (x, y) est un arc. Un k-cycle d'un graphe orienté est une suite $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de k sommets tels que $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots v_k \to v_1$.

Un *tournoi* est un graphe orienté tel que pour toute paire de sommets distincts p et q, on a $p \to q$ ou $q \to p$ mais pas les deux.

Un tournoi est dit *transitif* s'il est acyclique, c'est-à-dire s'il ne contient aucun cycle.

Question 1.– Montrer qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il ne contient aucun 3-cycle.

Un tournoi est dit *libre* s'il ne contient pas quatre points p, q, r, s formant un 3-cycle pqr et une source ou un puits s; en d'autres termes, un tournoi est libre si et seulement s'il ne contient aucun sous-graphe de la forme :

$$\begin{array}{ccc} s & \to & p \\ \downarrow & \swarrow\!\!\searrow & \uparrow \\ q & \to & r \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} s & \leftarrow & p \\ \uparrow & \nwarrow\!\!\nearrow & \uparrow \\ q & \to & r \end{array} .$$

(Une *source* domine les autres sommets; un *puits* est dominé par eux.)

Soit G un graphe orienté et soit x un sommet de G. Le graphe orienté obtenu en changeant l'orientation des arcs incidents au sommet x est dit être obtenu à partir de G par négation du sommet x.

Question 2.– Montrer qu'un tournoi est libre si et seulement s'il est obtenu à partir d'un tournoi transitif par négation d'un sous-ensemble de ses sommets.

Question 3.– Soit G un tournoi libre. Montrer que le diagramme de Hasse d'un tournoi transitif dont G est obtenu par négation, peut être construit en examinant la direction de $O(n \log n)$ arcs de G. (On rappelle que le diagramme de Hasse d'un graphe acyclique (V, E) est le sous-graphe (V, E_H) ayant un nombre minimum d'arcs tel que E et E_H ont la même fermeture transitive.)

Un *CC-système* est un ensemble fini muni d'un prédicat ternaire pqr vérifiant les 6 axiomes suivants

Axiome 1	$pqr \Longrightarrow qrp$
Axiome 2	$pqr \Longrightarrow \neg prq$
Axiome 3	$pqr \vee prq$
Axiome 4	$tqr \wedge ptr \wedge pqt \Longrightarrow pqr$
Axiome 5	$tsp \wedge tsq \wedge tsr \wedge tpq \wedge tqr \Longrightarrow tpr$
Axiome 6	$stp \wedge stq \wedge str \wedge tpq \wedge tqr \Longrightarrow tpr.$

Question 4.– Montrer que toute famille finie de points du plan $\mathbb{R}^2$ en position générale (i.e. la famille ne contient pas de triplet de points collinaires) munie du prédicat

$$xyz \Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

est un CC-système. (Ici $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ et (z_1, z_2) sont les coordonnées Cartésiennes des points x, y et z.)

A chaque élément p d'un CC-système est associé le graphe orienté $G(p)$ dont les arcs sont les arcs $q \to r$ si et seulement si pqr est vrai.

Question 5.– Montrer que $G(p)$ est un tournoi libre.